

Dopunski test iz *Matematike*

I UPISNI ROK – JUN 2018

Zadatak 1 | 5 bodova

Srediti izraz:

$$\frac{9x^2 - 4}{3x^2 + 5x + 2}$$

Rješenje:

$$\frac{9x^2 - 4}{3x^2 + 5x + 2} = \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{(x + 1)(3x + 2)} = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

Zadatak 2 | 8 bodova

Cijena proizvoda je prvo povećana 3%, a zatim je nova cijena snižena za 5%, tako da je trenutna cijena proizvoda 1957 €. Odrediti prvobitnu cijenu proizvoda?

Rješenje:

$$\begin{aligned} \left(x \cdot \frac{100 + 3}{100}\right) \cdot \frac{100 - 5}{100} &= 1957 \text{ €} \Leftrightarrow \\ x \cdot 1.03 \cdot 0.95 &= 1957 \text{ €} \Leftrightarrow \\ x \cdot 0.9785 &= 1957 \text{ €} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1957 \text{ €}}{0.9785} = 2000 \text{ €}. \end{aligned}$$

Zadatak 3 | 7 bodova

Odrediti vrijednost izraza:

$$\left(\frac{i^{45}}{\sqrt{2}} + \frac{i^{44}}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} i^{45} &= i \wedge i^{44} = 1 \\ \left(\frac{i^{45}}{\sqrt{2}} + \frac{i^{44}}{\sqrt{2}}\right)^{-2} &= \left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{(1+i)^2} = \frac{2}{1+2i+i^2} = \frac{2}{1+2i-1} \\ &= \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} \\ &= -i. \end{aligned}$$

Zadatak 4 | 4 bodova

Koji od datih sistema linearnih jednačina ima beskonačno mnogo rješenja?

- a) $3x + 4y = 2 \wedge 4x + 8y = 5$
- b) $3x + 4y = 2 \wedge 6x + 8y = 4$
- c) $3x + 4y = 2 \wedge 6x - 8y = 4$
- d) $3x + 4y = 2 \wedge 5x + 2y = 3$

Rješenje: b), jer je:

$$6x + 8y = 4 \quad | : 2 \Leftrightarrow 2x + 4y = 2.$$

Zadatak 5 | 8 bodova

Koju vrijednost ima parametar m u jednačini $(m + 3)x^2 - (m + 4)x + 1 = 0$?, ako je poznato da za rješenja jednačine x_1 i x_2 važi jednakost $x_1 + x_2 = 0$?

Rješenje:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Leftrightarrow \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \\ x_1 + x_2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{-b - b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 0 \\ \frac{b}{a} = 0 &\Leftrightarrow b = 0 \wedge a \neq 0. \end{aligned}$$

$$b = 0 \Leftrightarrow -(m + 4) = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

$$a = m + 3 = -1 \neq 0.$$

Zadatak 6 | 7 bodova

Koeficijent pravca prave p , koja prolazi kroz tačku $(6, -2)$ je $\frac{1}{3}$. Koja od datih tačaka pripada pravoj p ?

- a) $(-6, -5)$
- b) $(-3, 4)$
- c) $(2, 5)$
- d) $(-3, -5)$

Rješenje:

$$p: y = \frac{x}{3} + b.$$

$$(6, -2) \in p \Leftrightarrow -2 = \frac{6}{3} + b \Leftrightarrow b = -4.$$

$$p: y = \frac{x}{3} - 4.$$

d) $(-3, -5) \in p$, jer $-5 = \frac{-3}{3} - 4$.

Zadatak 7 | 4 boda

Uprostiti izraz:

$$(a + 2)^2 + 2(a + 2)(b - 1) + (b - 1)^2,$$

a zatim izračunajte njegovu vrijednost za $a = 0.8$ i $b = 1.2$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} (a + 2)^2 + 2(a + 2)(b - 1) + (b - 1)^2 &= ((a + 2) + (b - 1))^2 \\ &= (a + b + 1)^2 \\ &= (0.8 + 1.2 + 1)^2 = 3^2 = 9. \end{aligned}$$

Zadatak 8 | 9 bodova

Riješiti nejednačinu:

$$\frac{-4}{x^2 + 3x - 10} > 0.$$

Rješenje:

$$\frac{-4}{x^2 + 3x - 10} > 0 \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^2 + 3x - 10} < 0 &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 5)(x - 2) < 0 \\ &\Leftrightarrow -5 < x < 2. \end{aligned}$$

Zadatak 9 | 12 bodova

Riješiti jednačinu:

$$4 + \log_2 x = \frac{5}{\log_2 x}.$$

Rješenje: Uvedemo smjenu $y = \log_2 x$, tj. $x = 2^y$:

$$\begin{aligned} 4 + y = \frac{5}{y} \quad | \cdot y, y \neq 0 &\Leftrightarrow \\ y^2 + 4y - 5 = 0 &\Leftrightarrow y = 1 \vee y = -5 \\ \Leftrightarrow x = 2^1 = 2 \vee x = 2^{-5} = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Zadatak 10 | 12 bodova

Izračunaj $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$, ako je poznato da je $\cos \alpha = -0.4$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$:

Rješenje:

$$\begin{aligned} \alpha = \cos^{-1}(-0.4) &= 1.98231 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \\ \sin\left(1.98231 - \frac{\pi}{3}\right) &= 0.80467 \end{aligned}$$

Zadatak 11 | 12 bodova

Odrediti površinu i zapreminu prizme, koja za osnovu ima jednakostranični trougao, čija je dužina stranica $a = 6 \text{ cm}$, a visina prizme je $H = 10 \text{ cm}$.

Rješenje:

$$P_B = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} 36 \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 15.58846 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} P &= 2P_B + 3Ha = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 180 \text{ cm}^2 \\ &= 18(\sqrt{3} + 10) \text{ cm}^2 \\ &\approx 211.17691 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

$$V = HP_B = 10 \cdot 9\sqrt{3} \text{ cm}^3 = 90\sqrt{3} \text{ cm}^3 \\ \approx 155.88457 \text{ cm}^3.$$

Zadatak 12 | 12 bodova

Date su funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{2}{x+2}.$$

Odrediti domen i nule funkcije

$$h(x) = 3f(x) - g(x).$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} h(x) = 3f(x) - g(x) &= 3 \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+2} \\ &= \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+2} \\ &= \frac{3(x+2) - 2(x-3)}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{3x+6-2x+6}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{x+12}{(x-3)(x+2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -12.$$